LXV олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 30 ноября 2017 года

XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Даны две арифметические прогрессии (a_n) и (b_n). Первые члены данных прогрессий равны, т.е. $a_1 = b_1$ и разность прогрессии (a_n) в два раза больше разности прогрессии (b_n). Пусть последовательность (c_n) определена формулой $c_n = a_n + b_n$ для каждого $n \geq 1$. Формула суммы n первых членов последовательности (c_n) есть $S_n = \frac{n(n+25)}{4}$. Найди первые члены и разности прогрессий (a_n) и (b_n). Также найди сумму первых 2017 членов прогрессии (a_n).

2. Отметь на координатной плоскости все точки с координатами $(x; y)$, где x и y удовлетворяют уравнению: $\log_5 xy - \log_5 \frac{x}{2} = \log_5 (2-x)$.

3. Найдите наименьшее целое число, которое необходимо прибавить к выражению $(x-2)(x+2)(x+6)(x+10)$, чтобы значение выражения было положительным при любом действительном значении x.

4. На основании *AD* трапеции *ABCD* (*AD*∥*BC*, *AD*>*BC*), как на диаметре построен круг, который касается стороны *CD* и пересекает сторону *AB* в точке *E* так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{4}$. Найдите площадь трапеции, если радиус круга равен R и $\angle ACD = 60°$.

5. Все единичные квадраты стола, размеры которого 2017x2017, выкрашены в белый цвет. За один ход необходимо выбрать состоящий из единичных квадратов квадрат произвольной величины в вершинах которого расположены белые единичные квадраты и выкрасить в черный цвет два единичных квадрата, которые расположены в противоположных вершинах диагонали выбранного квадрата. Найди наименьшее возможное количество белых единичных квадратов, которые останутся на столе в результате таких ходов.